E.N.S.I. CHIMIE SUD Option P 1981

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

On désigne par $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls. a, b et α désignent trois constantes réelles.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{a\,e^x + b}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \alpha \end{cases}$$

1° Quelles conditions doivent vérifier a, b et α pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

2° Montrer qu'alors la fonction f est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser les valeurs de $f'(0)$ et $f''(0)$.

3° On considère l'équation différentielle (1) du second ordre, à coefficients non constants :

$$(1) \qquad xy'' + (2 - x)\,y' - y = 0$$

a. Montrer que la fonction y_1 définie sur $\mathbb{R}^*$ par $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ vérifie, sur $\mathbb{R}^*$, la relation (1).

b. On effectue le changement de fonction inconnue défini par $u(x) = xy(x)$. Montrer que la nouvelle fonction inconnue $u(x)$ vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on intégrera.

c. En déduire la solution générale de l'équation (1) sur $\mathbb{R}^*$.

d. Parmi les solutions de (1) existe-t-il des fonctions définies et continues pour tout $x \in \mathbb{R}$?

4° On considère la fonction φ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{e^x + 1}{x} \qquad \text{pour } x \neq 0.$$

a. Déterminer la fonction dérivée $\varphi'(x)$. Montrer qu'elle s'annule pour une unique valeur β de x.

b. En appliquant un nombre convenable de fois la méthode de Newton à la résolution de l'équation :

$$e^x(x - 1) - 1 = 0$$

à partir de $x_0 = 2$, déterminer β à 10^{-5} près, puis $\varphi(\beta)$.

c. Construire avec soin le graphe de φ pour $0{,}5 \leqslant x \leqslant 2$. Calculer les valeurs de φ pour les valeurs de x en progression arithmétique de raison 0,25 appartenant à l'intervalle [0,5 ; 2]. On prendra pour unités 8 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

.../...

II

On considère la fonction g, définie pour tout x réel par les relations :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1° Montrer que g est continue et dérivable au point $x = 0$.

2°*a*. Étudier les variations de la fonction $z(x) = e^x - 1 - xe^x$, en déduire le signe de la dérivée $g'(x)$.

b. Étudier les branches infinies de $g(x)$.

c. Construire sommairement le graphe Γ de $g(x)$.

3° On pose :

$$h(x) = g(x) + \frac{x}{2} \qquad \text{pour tout } x \text{ réel}$$

a. Démontrer que la fonction h ainsi définie admet à tout ordre n un développement limité au voisinage de $x = 0$ dont la partie régulière sera notée :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

b. Calculer le développement limité à l'ordre 5 de la fonction h au voisinage de zéro. Que peut-on dire des coefficients a_1, a_3 et a_5?

c. La propriété trouvée en *b* est-elle généralisable à tout coefficient de la forme a_{2p+1}? Pourquoi?

4°*a*. Démontrer que les coefficients a_k vérifient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, la relation :

$$\frac{a_n}{1!} + \frac{a_{n-1}}{2!} + \ldots + \frac{a_2}{(n-1)!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right].$$

b. Vérifier ainsi l'exactitude des coefficients trouvés au 3°*b*.

III

Dans cette partie, on désigne par n un entier $\geqslant 1$, par E l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{R}$, par E_n le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n et par E_0 le sous-espace des polynômes de degré zéro.

On notera φ l'application de E dans E qui, à tout polynôme P, fait correspondre le polynôme $Q = \varphi(P)$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Q(x) = P(x+1) - P(x)$$

1° $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des polynômes définis par

$$\begin{cases} A_0(x) = 1 \\ A_k(x) = x(x-1)\ldots(x-k+1) & \forall k \geqslant 1 \end{cases}$$

Montrer que la famille $\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est une base de E_n.

2° Montrer que la restriction φ_n de φ à E_n est un endomorphisme de E_n dont on écrira la matrice dans la base $\{A_0, \ldots, A_n\}$.

Déterminer le noyau et l'image de φ_n.

3° On donne un polynôme R de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Montrer qu'il existe un polynôme P et un seul de E_n tel que soient vérifiées les deux conditions :

.../...

$$\begin{cases} \varphi(P) = R \\ \int_0^{+1} P(x)\,dx = 0 \end{cases}$$

Pour tout entier naturel k compris entre 1 et n on désignera par P_k le polynôme correspondant au cas $R(x) = kx^{k-1}$.

4°*a*. $(B_k)_{k \geqslant 1}$ est la suite des polynômes définis par

$$B_k(x) = (x+1)^k - x^k \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Montrer que la famille $\{ B_1, B_2, \ldots, B_n \}$ est une base de l'espace vectoriel E_{n-1}.

b. Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

c. Montrer que $\forall n \geqslant 2 \qquad P_n(0) = P_n(1)$.

d. Établir la relation :

$$\text{pour tout } n \geqslant 2 \qquad P'_n(x) = n\,P_{n-1}(x)$$

où P'_n désigne le polynôme dérivé de P_n.

e. On pose :

$$(-1)^n P_n(1-x) = S_n(x)$$

En considérant $\varphi(S_n)$, démontrer que :

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(1-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

f. Montrer que :

pour tout entier $p \geqslant 1 \qquad P_{2p+1}(0) = P_{2p+1}(1) = 0$.

5°*a*. Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$P_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$\begin{cases} P_{2p-1} \text{ ne s'annule pas sur } \left]0; \frac{1}{2}\right[\\ P_{2p} \text{ s'annule une fois et une seule sur } \left]0; \frac{1}{2}\right[\end{cases}$$

6° On pose :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}\, x^{n-k}$$

a. Calculer $\alpha_{n,0}$ et $\alpha_{n,1}$.

b. Pour tout entier $k \leqslant n$, montrer que le rapport $\dfrac{\alpha_{n,k}}{C_n^k}$ est indépendant de n, où les C_n^k désignent les coefficients du binôme de Newton.

c. On posera $b_k = \dfrac{(n-k)!\,\alpha_{n,k}}{n!}$.

Montrer que, pour $k \geqslant 2$, les nombres b_k sont égaux aux coefficients a_k de la IIe partie.

d. Montrer que $P_{2n}(0) = P_{2n}(1) = a_{2n} \times (2n)!$

7°*a*. Montrer que ; pour f quelconque de C^{2p+1} :

$$\int_0^1 f^{(2p+1)}(t)\,P_{2p+1}(t)\,dt = (2p+1)\left[2p\int_0^1 f^{(2p-1)}(t)\,P_{2p-1}(t)\,dt + P_{2p}(0)\left(f^{(2p-1)}(0) - f^{(2p-1)}(1)\right)\right]$$

b. En déduire que l'on a :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[f(0) + f(1)\right] - \sum_{k=1}^{p} a_{2k}\left[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right] - \frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 f^{(2p+1)}(t)\,P_{2p+1}(t)\,dt.$$

XXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail